§7.5 估计的相合性

- 定义5.1. 设$T_n = T_n(X_1, \cdots, X_n)$ 满足: $\forall \varepsilon > 0$,

$$P_\theta\big(|T_n - g(\theta)| \geqslant \varepsilon\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

则称T_n 为$g(\theta)$ 的相合估计, 或T_n 具有相合性.

- 定理5.1, 推论5.1.

样本矩$a_\ell = \overline{X^\ell}$ 为总体矩$\alpha_\ell = EX^\ell$ 的相合估计.

- 定理5.2. $g(\theta)$ 的矩估计具有相合性.

(注: $g(\theta) = \phi(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$, 其中$\phi$ 为连续函数).

例5.2. 总体: $X \sim U(0,\theta)$, 样本量: n.

- 矩估计$2\bar{X}$ 具有相合性.
- 最大似然估计$T_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ 也具有相合性: $\forall 0 < \varepsilon < \theta$,

$$\begin{aligned} P_\theta(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) &= P_\theta(T_n \leqslant \theta - \varepsilon) \\ &= P_\theta(X \leqslant \theta - \varepsilon)^n = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 0. \end{aligned}$$